1. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (2xzg(y), yz + g(z), x - z^2 g(y))$, con $g \in C^1(\mathbf{R})$. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de la frontera del sólido definido por: $x^2 + z^2 \leq 4$; $z \leq y \leq z + 2$; $z \geq 0$, con la normal saliente.

2. Sea $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo vectorial $C^2(\mathbf{R}^3)$, con $rot\vec{F}(x,y,z) = (x, 1 - 3y, 2z)$, calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ con $z = 2x$ indicando en un esquema el sentido de orientación utilizado.

3. Sea π_0 el plano normal en el punto $A = (1,1,1)$ a la curva intersección de las superficies $z + 3y = x^2 + 3$ con $x^2 + 1 = y + xz$. Calcular el área del trozo de π_0 que se encuentra en el primer octante.

4. Calcular la masa de una placa plana Q definida por:

$$Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 4, \quad x^2 + (y-2)^2 \leq 4\},$$

si la densidad de la placa es $\delta(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Sea $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $zx + yz^2 + ln(z - 2y) - 15 = 0$, en un entorno del punto $A = (2,1,3)$. Calcular el valor aproximado de $f(1.97, 1.01)$ usando una aproximación lineal.

AM II

HOJA N°

FECHA 18-12-14

① Sea $\bar{F}(x,y,z) = \left(2xz\, g(y),\; yz + g(z),\; x - z^2 g(y)\right)$ con $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Calcular el flujo de $\bar{F}$ a través de la frontera del sólido definido por

$x^2 + z^2 \leq 4$; $z \leq y \leq z+2$; $z \geq 0$, con la normal saliente

Sea W el sólido del enunciado y S su superficie frontera.

- <u>Analizo la forma de W a través de observar S:</u>

$\begin{cases} \circ\; x^2+z^2 = 4 \to \text{cilindro radio 2 centrado en el eje } y \\ \circ\; z = y \to \text{plano } y - z = 0 \\ \circ\; y = z+2 \to \text{plano } y - z = 2 \\ z = 0 \to \text{plano } xy \end{cases}$

cilindro cortado x dos planos (con $z \geq 0$)

$y = z$ $y = z+2$ $z = 0$

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq t \leq \pi$

Plano $y=0$

Proyección S/plano xz

- <u>Analizo si se cumplen las hipótesis del T. Gauss</u>

✓ W es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera S está orientada hacia el exterior

✓ $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, C^1 en W ($W \subseteq \mathbb{R}^3$), pues sus componentes son polinomios de funciones elementales con $g \in C^1(\mathbb{R})$ s/enunciado

$\therefore \iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W \text{div.}\bar{F}\, d\text{vol}$

<u>Calculo div. $\bar{F}$</u>

$\text{div.}\bar{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 2z\, g(y) + z - 2z\, g(y) = z = \text{div.}\bar{F}$

Por la forma de W, conviene utilizar coord. cilíndricas:

$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = y \\ z = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$

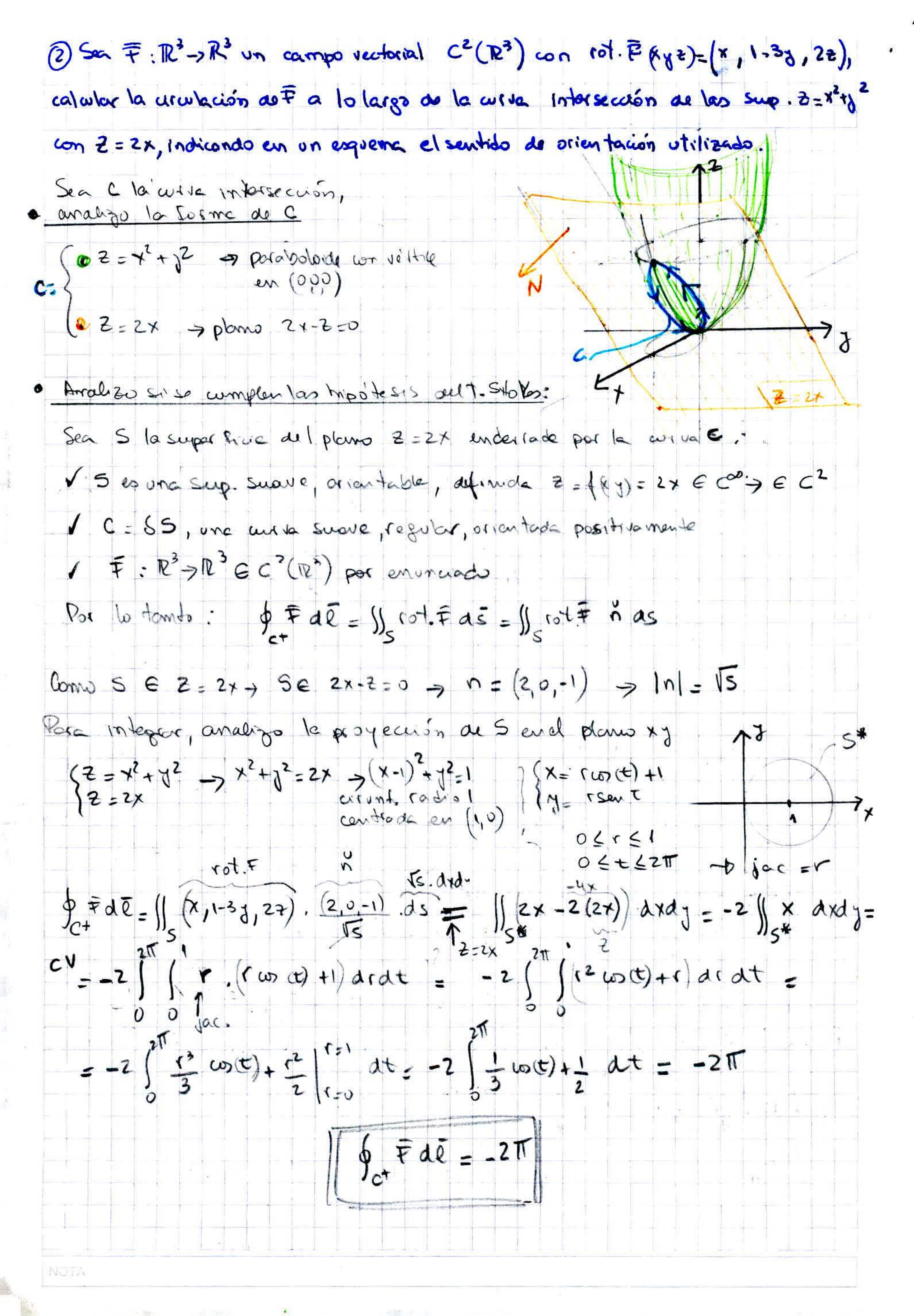
$T(r,t,y) = \left(r\cos(t),\; y,\; r\,\text{sen}(t)\right)$, $r \in [0,2]$, $t \in [0,\pi]$, $r\,\text{sen}(t) \leq y \leq r\,\text{sen}(t)+2$ jac. $= r$

- $\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W z\, d\text{vol} \overset{\text{c.v.}}{=} \int_0^{\pi}\int_0^2\int_{r\,\text{sen}(t)}^{r\,\text{sen}(t)+2} \underbrace{r\,\text{sen}(t)}_{z} \cdot \underbrace{r}_{\text{jac}}\, dy\, dr\, dt =$

$= \int_0^{\pi}\int_0^2 r^2\,\text{sen}(t)\left(r\,\text{sen}(t)+2 - r\,\text{sen}(t)\right) dr\, dt = 2\int_0^{\pi}\int_0^2 r^2\,\text{sen}(t)\, dr\, dt = 2\int_0^{\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^2 \text{sen}(t)\, dt =$

$= 2\int_0^{\pi} \frac{8}{3}\,\text{sen}(t)\, dt = \frac{16}{3}\int_0^{\pi} \text{sen}(t)\, dt = \frac{16}{3}\cdot 2 = \frac{32}{3} \rightsquigarrow \boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \frac{32}{3}}$

NOTA



② Sea $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $C^2(\mathbb{R}^3)$ con $\text{rot}.\bar{F}(x,y,z) = (x, 1-3y, 2z)$, calcular la circulación de $\bar{F}$ a lo largo de la curva intersección de las sup. $z = x^2+y^2$ con $z = 2x$, indicando en un esquema el sentido de orientación utilizado.

Sea C la curva intersección,

- analizo la forma de C

$$C: \begin{cases} z = x^2+y^2 \rightarrow \text{paraboloide con vértice en } (0,0,0) \\ z = 2x \rightarrow \text{plano } 2x - z = 0 \end{cases}$$

- Analizo si se cumplen las hipótesis del T. Stokes:

Sea S la superficie del plano $z = 2x$ encerrada por la curva C.

✓ S es una sup. suave, orientable, definida $z = f(x,y) = 2x \in C^\infty \rightarrow \in C^2$

✓ $C = \delta S$, una curva suave, regular, orientada positivamente

✓ $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ por enunciado

Por lo tanto: $\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}.\bar{F}\, d\bar{s} = \iint_S \text{rot}\bar{F}\, \breve{n}\, ds$

Como $S \in z = 2x \rightarrow S \in 2x - z = 0 \rightarrow n = (2,0,-1) \rightarrow |n| = \sqrt{5}$

Para integrar, analizo la proyección de S en el plano xy

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow x^2+y^2 = 2x \rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$$

circunf. radio 1 centrada en (1,0)

$$\begin{cases} x = r\cos(t)+1 \\ y = r\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le t \le 2\pi \rightarrow \text{jac} = r$$

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \overbrace{(x, 1-3y, 2z)}^{\text{rot}.F} \cdot \overbrace{\frac{(2,0,-1)}{\sqrt{5}}}^{\breve{n}} \overbrace{.ds}^{\sqrt{5}.dxdy} \underset{z=2x}{=} \iint_{S^*} 2x - 2(2x)\, dxdy = -2 \iint_{S^*} x\, dxdy =$$

$$\overset{CV}{=} -2 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \underset{\text{jac.}}{r} \cdot (r\cos(t)+1)\, dr\, dt = -2 \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos(t)+r)\, dr\, dt =$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\cos(t) + \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=1} dt = -2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\cos(t) + \frac{1}{2}\, dt = -2\pi$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = -2\pi}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA 18-12-14

③ Sea Π_0 el plano normal en el punto $A = (1,1,1)$ a la curva intersección de las sup. $z + 3y = x^2+3$ con $x^2+1 = y + xz$. Calcular el área del trozo de Π_0 que se encuentra en el primer octante

Sea S la superficie $z+3y = x^2+3$ y T la sup. $x^2+1 = y + xz$ →

→ $S: z+3y-x^2-3=0$

$T: x^2+1-y-xz=0$

Sea $F(xyz) = z+3y-x^2-3$ y $G(xyz) = x^2+1-y-xz$

∴ S es el conj de nivel 0 de F y T es el conj de nivel 0 de G.

Para hallar el plano normal a la curva intersección necesito conocer la tangente a esa curva, que resultará ser la normal del plano que quiero hallar.

N_S, z, y, x, S

z, N_T, T, y, x

N_x, z, N_S, C, T, t = tangente de C, y, x, S, C → C: curva $S \cap T$

$$t = N_T \times N_S$$

Los gradientes de F y G son proporcionales a las normales a las sup. S y T respectivamente → $\nabla F = \alpha N_S$ y $\nabla G = \beta N_T$. Pero como sólo interesa la dirección, tomaré $\alpha = \beta = 1$ ∴

$\nabla F(x,y,z) = N_S$, $\nabla G(xyz) = N_T$ → $N_S = (-2x, 3, 1)$, $N_T = (2x-z, -1, -x)$

Como Π_0 es el plano normal en el punto A, calculo las Normales y el producto vectorial en ese punto:

$$N_{\Pi_0} = N_{T(1,1,1)} \times N_{S(1,1,1)} = (1,-1,-1) \times (-2,3,1) = (2,1,1) = N_{\Pi_0}$$

$\Pi_0: 2x+y+z=4$

$\Pi_0 : N_{\Pi_0} \cdot (x,y,z) = d$ donde $d = N_{\Pi_0} \cdot A$ → $d = (2,1,1) \cdot (1,1,1) = 4$

Para calcular el área, observo cuál es su proyección en el plano xy: $(z=0) \to y = 4-2x$

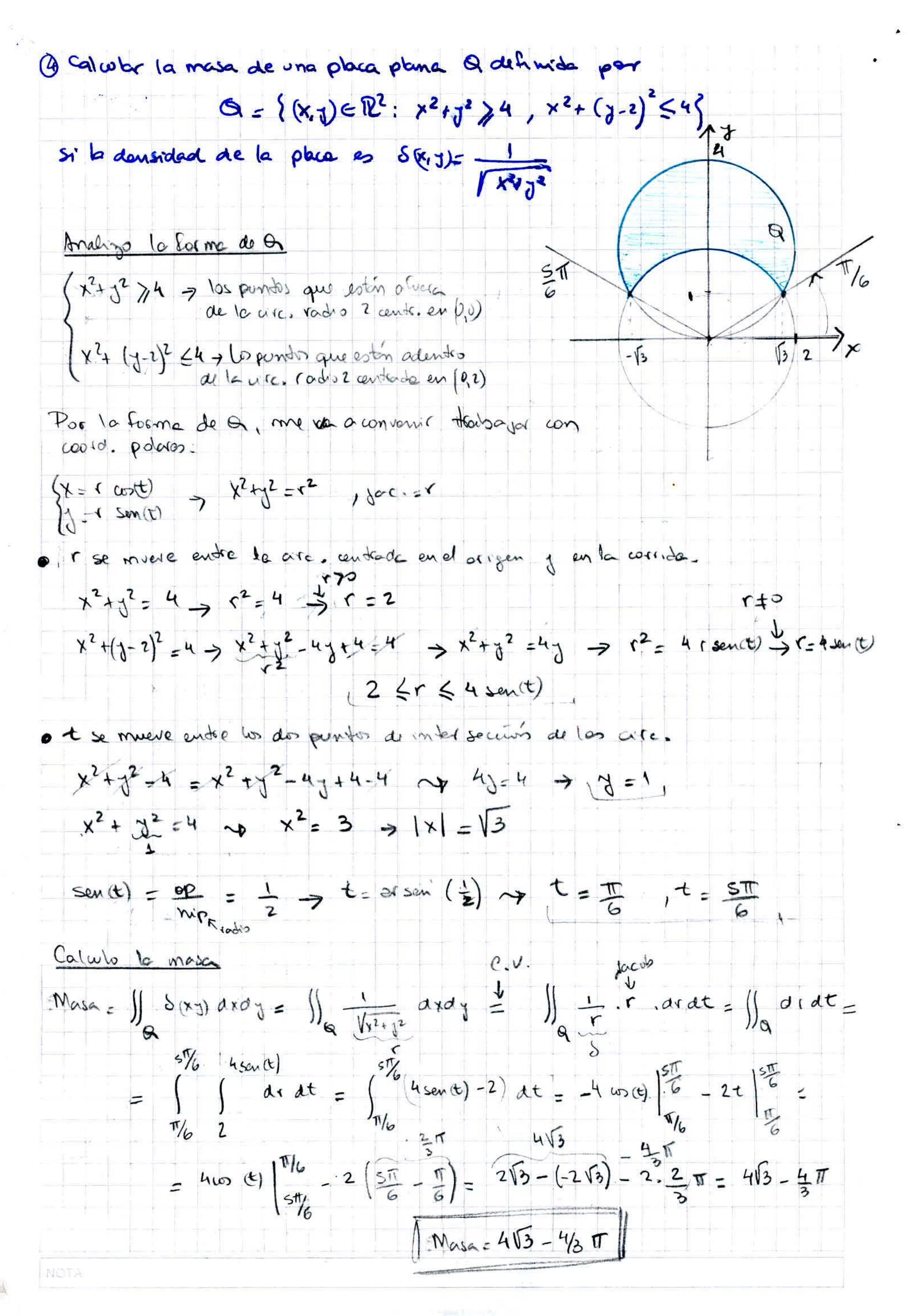
plano xy — 4, y, x, 2 — proyección de Π_0 en el 1° octante (D)

$$A = \iint_D \|N_{\Pi_0}\| \, dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \|(2,1,1)\| \, dy\,dx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \sqrt{6} \, dy\,dx = \sqrt{6} \int_0^2 4-2x \, dx = \sqrt{6} \cdot 4$$

Área $= 4\sqrt{6}$

NOTA



④ Calcular la masa de una placa plana Q definida por

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4 \ , \ x^2+(y-2)^2 \leq 4\}$$

si la densidad de la placa es $\delta(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Analizo la forma de Q

$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 4 \rightarrow \text{los puntos que están afuera de la circ. radio 2 centr. en } (0,0) \\ x^2+(y-2)^2 \leq 4 \rightarrow \text{Los puntos que están adentro de la circ. radio 2 centrado en } (0,2) \end{cases}$

Por la forma de Q, me va a convenir trabajar con coord. polares:

$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases} \rightarrow x^2+y^2 = r^2 \quad , \text{ jac.} = r$

- r se mueve entre la circ. centrada en el origen y en la corrida.

$x^2+y^2 = 4 \rightarrow r^2 = 4 \xrightarrow{r>0} r = 2$

$x^2+(y-2)^2 = 4 \rightarrow \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} - 4y + 4 = 4 \rightarrow x^2+y^2 = 4y \rightarrow r^2 = 4r\,\text{sen}(t) \xrightarrow{r\neq 0} r = 4\,\text{sen}(t)$

$$2 \leq r \leq 4\,\text{sen}(t)$$

- t se mueve entre los dos puntos de intersección de las circ.

$x^2+y^2-4 = x^2+y^2-4y+4-4 \rightarrow 4y = 4 \rightarrow y = 1$

$x^2 + \underbrace{y^2}_{1} = 4 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow |x| = \sqrt{3}$

$\text{sen}(t) = \dfrac{op}{hip_{\leftarrow \text{radio}}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow t = \text{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right) \rightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \ , \ t = \dfrac{5\pi}{6}$

Calculo la masa

$\text{Masa} = \iint_Q \delta(x,y)\,dx\,dy = \iint_Q \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}}\,dx\,dy \overset{\text{C.V.}}{=} \iint_Q \underbrace{\dfrac{1}{r}}_{\delta} \cdot \overset{\text{jacob}}{r} \, dr\,dt = \iint_Q dr\,dt =$

$= \displaystyle\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{2}^{4\,\text{sen}(t)} dr\,dt = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (4\,\text{sen}(t) - 2)\,dt = -4\cos(t)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} - 2t\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} =$

$= 4\cos(t)\Big|_{5\pi/6}^{\pi/6} - 2\underbrace{\left(\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6}\right)}_{\frac{2}{3}\pi} = \underbrace{2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3})}_{4\sqrt{3}} \underbrace{- 2 \cdot \dfrac{2}{3}\pi}_{-\frac{4}{3}\pi} = 4\sqrt{3} - \dfrac{4}{3}\pi$

$$\boxed{\text{Masa} = 4\sqrt{3} - 4/3\,\pi}$$

NOTA

AM II

FECHA 18-12-14

⑤ Sea $z=f(x,y)$ definida implícitamente por $zx+yz^2+\ln(z-2y)-15=0$, en un entorno del punto $A=(2,1,3)$.

Calcular el valor aprox. de $f(1.97, 1.01)$ usando una aprox. lineal

Sea $F(xyz) = zx + yz^2 + \ln(z-2y) - 15$

Como piden un valor aprox para $f(1,97, 1.01)$ usando una aprox. lineal voy a hallar el polinomio de taylor de orden 1 para un entorno de $B=(2,1)$, pues en en entorno a un punto dado $p(xy) = f(xy)$

z está definida implícitamente por $F(xyz)=0$, por lo que se cumplen las hipótesis del TFI:

∴
$$\frac{\partial f}{\partial x}(xy) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(xyz)}{\frac{\partial F}{\partial z}(xyz)} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(xy) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(xyz)}{\frac{\partial F}{\partial z}(xyz)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = z \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(2,1,3) = 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(xyz) = z^2 - \frac{2}{z-2y} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(2,1,3) = 3^2 - \frac{2}{3-2.1} = 7$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(xyz) = x + 2yz + \frac{1}{z-2y} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,3) = 2 + 2.1.3 + \frac{1}{3-2.1} = 9$$

$\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,3) = 3$, $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1,3) = 7$, $\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,3) = 9$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(xyz)}{\frac{\partial F}{\partial z}(xyz)} = -\frac{z}{x+2yz+\frac{1}{z-2y}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,3)}{\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,3)} = -\frac{3}{9} \rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\frac{1}{3}}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(xyz)}{\frac{\partial F}{\partial z}(xyz)} = -\frac{z^2 - \frac{2}{z-2y}}{x+2yz+\frac{1}{z-2y}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(2,1,3)}{\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,3)} = \boxed{-\frac{7}{9} = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}$$

∴ En un entorno al punto $B=(2,1)$: → $A=(2,1,3) \rightarrow f(2,1) = 3$

$$p(xy) = \overbrace{f(2,1)}^{z=3} + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)$$

$$p(x,y) = 3 + \left(-\frac{1}{3}\right)(x-2) + \left(-\frac{7}{9}\right)(y-1) = 3 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3} - \frac{7}{9}y + \frac{7}{9} = \boxed{\frac{1}{9}(-3x-7y+40) = p(xy)}$$

en un entorno a (2,1)

En un entorno al punto $B=(2,1)$: $f(xy) = p(x,y)$

$$p(1.97, 1.01) = \frac{1}{9}\left(-3(1.97) - 7(1.01) + 40\right) = 3,00222$$

$$\boxed{f(1.97, 1.01) \simeq 3.00222}$$

NOTA